במקרה שהגבול קיים

# כללים

1. אם קיים אזי . הוכחה: תרגיל
2. אם קיימים אזי   
   הוכחה:
3. אם קיים ו אזי   
   הוכחה: אמנם,

# משפט

נניח שf אינט' על לכל , אזי קיים אם ורק אם לכל קיים כך שעבור מתקיים

## הוכחה

נסמן . קיים אם ורק אם לכל קיים כך שאם אזי

# משפט(קריטריון ההשוואה)

נניח f,g אינט' על לכל ומקיימות לכל באשר אזי

1. אם אזי
2. אם מתבדר אז גם מתבדר.

## הוכחה

נסמן . אזי לכל .  
 ⬄ ⬄ חסום מלעיל שכן הינה פונקציה לא יורדת. ברור איפה שאם חסומה מלעיל גם חסומה מלעיל, ז"א אם אזי וגם אם מתבדר(ז"א אינה חסומה מילעיל) אזי גם מתבדר(ז"א גם אינה חסומה מלעיל)

# דוגמה

אמנם, עבור , ולכן , לכן

## הערה

בשנה הבאה נלמד ש, למרות שאין נוסחה מפורשת ל

נתבונן בפונקציה עבור (או ) ונשאל עבור אילו מתכנס .  
טבעי להניח ש.

מתבדר ולכן לפי קריטריון ההשוואה מתבדר לכל (שכן אם ו)

אם

# משפט

אם f,g אינט' על לכל ו עבור ובנוסף מתקיים אזי האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחד.

## הוכחה

אפשר להניח ש. קח . אזי קיים כך שעבור . עכשיו, ניישם את קריטריון ההשוואה: לכל .

# הגדרה

תהי f פונקציה אינט' על לכל . נגיד ש מתכנס בהחלט אם(ורק אם) .

# משפט

אם מתכנס בהחלט אזי

## הוכחה

השתמש בתנאי קושי לקיום אינטגרל לא אמיתי עם אי השוויון

# דוגמה

מתכנס בהחלט. וידוע ש, לכן לפי קריטריון ההשוואה גם

## הערה

בניגוד לזה מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

# משפט

תהי f אינט' על לכל באשר

1. אם באשר ו לכל אזי מתכנס בהחלט.
2. אם החל מx מסויים באשר ו אזי מתבדר.

# משפט(דירכלי Dirichlet)

תהי וf פונקציה רציפה ב. אם קיים כך לכל אזי מתכנס עבור

## דוגמה

, , . ,

## הוכחה

נסמן . אזי לכל שכן f רציפה. ברור ש לכל . נחשב את דרך אינטגרציה לפי חלקים:

# טענה

לא מתכנס בהחלט, ז"א מתבדר

## תרגיל

עוד הוכחה לכך ש לא מתכנס בהחלט:

1. . נוכיח ש לא קיים.

# משפט

תהי f פונקציה חיובית לא עולה על (ולכן אינט' על לכל ), אזי הטור והאינטגרל מתכנסים ומתבדרים יחד.

## הוכחה

מתקיים לכל   
נסמן   
 ⬄ הסדרה חסומה מלעיל(שכן ולכן מדובר בסדרה עולה).  
מ(\*) ברור ש חסומה מלעיל אם ורק אם חסומה מלעיל, ז"א אם ורק אם הטור מתכנס.

# דוגמה

⇦ ⇦

- תרגיל

, - תרגיל